ECONOMIA MONETARIA
Livello e composizione della ricchezza delle famiglie (seconda parte)

Le scelte delle famiglie

Le scelte finanziarie delle famiglie riguardano:

1. la formazione del saldo economico.
   I saldi economici deteminano nel tempo la posizione patrimoniale delle famiglie. Si apre dunque
2. la questione della suddivisione del patrimonio tra le varie attività finanziarie.

Nella lezione precedente abbiamo analizzato il punto 1.
Quanto segue riguarda il punto 2.

Un nuovo modello microeconomico

- La scelta consumo-risparmio viene analizzata dalla teoria microeconomica con la teoria della scelta intertemporale.
- In questa si assume che ci sia un unico tasso di interesse (r) e quindi un'unica attività finanziaria. Tale attività è rappresentata da titoli a rendimento fisso.
- Per questi titoli, il tasso di rendimento è uguale al tasso di interesse. In sostanza si tratta di titoli di credito per i quali non esiste un mercato secondario.

Altri titoli

Nei mercati finanziari esistono molte tipologie di titoli che hanno rendimenti differenti tra di loro. Inoltre il rendimento di un titolo può variare nel tempo.

I titoli a rendimento variabile sono

- i titoli di credito e
- i titoli di proprietà.

qualora esista un mercato secondario.

Il rendimento dei titoli

Il rendimento di un titolo è dato da

$$r_t = \frac{V_t - x}{x}$$

Dove
x è la somma impiegata e
V_t è il valore dell'investimento al tempo t.

Calcolo del rendimento

Si consideri la situazione seguente:

- Il titolo ha un valore nominale pari a v_n;
- Il suo valore di mercato v_t cambia nel tempo.
- Indichiamo con v_0 il suo valore di emissione.
- Il numero di titoli che è possibile acquistare investendo una somma x è dunque $n = \frac{x}{v_0}$;
- sia c il compenso riconosciuto dall'emittente su ogni titolo.

Il valore dell'investimento finanziario è

$$V_t = nv_t + nc,$$

Calcolo del rendimento (continua)

ma $n = x/v_0$. Sosituendo

$$V_t = \frac{x}{v_0} v_t + \frac{x}{v_0} c$$

$$V_t - x = \frac{x}{v_0} v_t + \frac{x}{v_0} c - x = x \left[\left(\frac{v_t}{v_0} - 1 \right) + \frac{c}{v_0} \right]$$

Il rendimento è dunque

$$r_t = \frac{V_t - x}{x} = \frac{x \left[\left(\frac{v_t}{v_0} - 1 \right) + \frac{c}{v_0} \right]}{x} = \left(\frac{v_t - v_0}{v_0} \right) + \frac{c}{v_0}.$$

Alcuni casi

Per un titolo di credito che non ha mercato secondario abbiamo $v_t = v_0 = v_n$ e $c = v_n r$:

$$r_t = \left(\frac{v_t - v_0}{v_0}\right) + \frac{c}{v_0} = \left(\frac{v_n - v_n}{v_n}\right) + \frac{v_n r}{v_n} = r$$

Per un titolo di credito che ha mercato secondario abbiamo $c = v_n r$, ma i vari v possono essere diversi tra di loro:

$$r_t = \left(\frac{v_t - v_0}{v_0}\right) + \frac{v_n}{v_0} r$$

Per un titoli di proprietà abbiamo $c = E[D|I(t)]$ (dividendo atteso in t)

$$r_t = \left(\frac{v_t - v_0}{v_0}\right) + \frac{E[D|I(t)]}{v_0}$$

Alcune questioni da analizzare

- Perché i soggetti detengono attività che hanno un rendimento più basso di quello massimo?
  - Ad esempio: perché si detengono depositi bancari (che hanno un basso rendimento) accanto ad altri titoli con un più alto rendimento? Non sarebbe meglio investire tutto nei titoli con un più alto rendimento atteso?
- Secondo quali criteri i soggetti in surplus scelgono le attività finanziarie in cui allocare tali surplus?

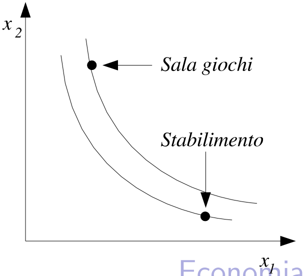
I titoli come variabili casuali (VC)

Sul mercato secondario, il prezzo dei titoli cambia nel tempo. Ad una certa data futura il prezzo può assumere diversi valori. Supponiamo di conoscere i prezzi possibili e che siamo in grado di attribuire ad ognuno di questi una probabilità (situazione di rischio). In sostanza il prezzo di un titolo ad una data futura è una Variabile Casuale di cui conosciamo la distribuzione di probabilità.

Se vogliamo analizzare la scelta del soggetto in presenza di questi titoli dobbiamo stabilire come egli decide in presenza di Variabili Casuali.

Microeconomia: la scelta tra VC

Esempio: scelta tra aprire uno stabilimento balneare o una sala giochi.
Indichiamo con x_1 il ricavo se il tempo è buono; x_2 il ricavo se il tempo è cattivo.
L'insieme di scelta è costituito dai due punti della figura.
In questo esempio il soggetto sceglie di aprire la sala giochi (curva di indifferenza più alta).



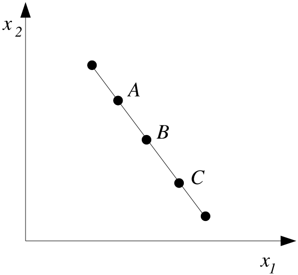
Combinazione di due VC

Supponiamo ora che la decisione non sia o l'una o l'altra Variabile casuale, ma che si possa possedere contemporaneamente le due attività (sala giochi e stabilimento) con le seguenti limitazioni:

- non si può tenere aperte le due attività contemporaneamente;
- si viene a conoscenza delle condizioni climatiche solo dopo essersi recati al lavoro;
- non si può cambiare decisione dopo aver osservato le condizioni climatiche.

Quindi ogni mattina il soggetto deve decidere quale attività fare e una volta arrivato al lavoro saprà se il tempo è buono o cattivo.
In questo contesto la decisione è sul numero di giorni (in un certo periodo) in cui andare allo stabilimento o alla sala giochi.
In sostanza si deve decidere come combinare le due Variabili Casuali.

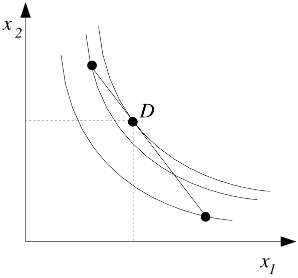
Se si ha la possibilità di combinare le variabili casuali, l'insieme di scelta si amplia.



Ad esempio:
il punto A rappresenta la combinazione di redditi che si ottiene tenendo aperta la sala giochi il 75% dei giorni;
il punto B quella che si ottiene aprendo la sala giochi per il 50% dei giorni. Ecc.

Scelta

La possibilità di combinare variabili casuali consente di raggiungere utilità più elevate.



Nella figura, il soggetto sceglie il punto D.
Il punto D identifica una variabile casuale ottenuta combinando le due variabili casuali di partenza.

Rappresentazione di una VC

VC= variabile casuale.
Negli esempi precedenti abbiamo potuto rappresentare le VC nel piano x_1, x_2 in quanto si tratta di casi particolari, ovvero:

- gli esiti possibili sono due e sono uguali per tutte le VC;
- le probabilità sono le stesse nei due stati.

Ma in genere, soprattutto quando si parla del prezzo o del rendimento dei titoli, il numero di esiti possibili è elevatissimo (infinito) e la probabilità di un certo stato varia da VC a VC.

Esiste un modo per sintetizzare questo numero elevatissimo di informazioni?

Rappresentazione di una VC

Quando si ha una VC è possibile calcolare dei valori che la descrivono parzialmente o in modo completo.

Ad esempio la VC gaussiana (o normale) è descritta totalmente dalla sua media e dalla sua deviazione standard.

Questo significa che se conosciamo media e deviazione standard di una VC distribuita "normalmente" siamo in grado di

- conoscere tutti i possibili esiti e
- abbinare ad ogni possibile esito una probabilità.

Riassumendo

Le VC possono essere rappresentate sinteticamente da un ridotto numero di parametri. Nel caso di VC normali ne bastano due: media e deviazione standard.

Nel nostro studio assumeremo che:

- esistono titoli a valore e rendimanto variabile (che chiameremo nel prosieguo titoli rischiosi) e titoli a rendimento fisso (che chiameremo titoli privi di rischio), e che
- il valore e il rendimento dei titoli rischiosi sono delle VC normali.

Possiamo dunque rappresentare graficamente i nostri titoli sul piano deviazione standard-media.

Nelle prossime diapositive

Per consentire la scelta occorre:

1. identificare l'insieme ammissibile;
2. determinare le curve di indifferenza;
3. effettuare la scelta utilizzando i due concetti precedenti.

Nelle prossime diapositive faremo questi tre passi con una rappresentazione media-deviazione standard delle VC.

La parte più laboriosa è l'individuazione dell'insieme ammissibile. A tale scopo adottiamo la seguente strategia:

- identificazione dell'insieme sotto l'ipotesi che esistano solo titoli rischiosi;
- estensione di tale insieme al caso in cui ci siano titoli privi di rischio.

1 Insieme ammissibile con due titoli rischiosi

Situazione:

abbiamo soltanto due titoli rischiosi (i titoli a rendimento fisso verranno inseriti successivamente). indichiamo con r_1 e r_2 le medie del rendimento e σ_1 e σ_2 le relative deviazioni standard.

Dobbiamo investire la ricchezza (F) in uno di questi o una combinazione dei due.

Chiamiamo b_1 la percentuale di ricchezza investita nel titolo 1 e b_2 quella investita nel titolo 2.

Una combinazione dei titoli è una nuova VC. Per rappresentarla dobbiamo calcolare la sua media e la sua deviazione standard.

Sappiamo dalla statistica che la media di una combinazioni di VC è

$$r = r_1 b_1 + r_2 b_2 \qquad (1)$$

mentre la deviazione standard è

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sigma_1^2 b_1^2 + \sigma_2^2 b_2^2 + 2 b_1 b_2 \sigma_{12}} \qquad (2)$$

dove

$$\sigma_{12} = \rho \sigma_1 \sigma_2$$

è la covarianza e ρ il coefficiente di correlazione. ρ è importante in quanto varia tra -1 e 1 e quindi è un indice che permette confronti.

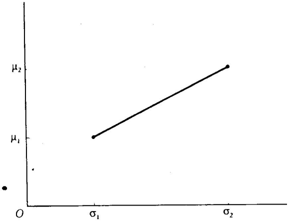
Combinazione di due titoli con $\rho = 1$

Se $\rho = 1$ le variazioni del rendimento dei due titoli in un certo periodo sono uguali. Ad esempio, se il rendimento del titolo 1 è aumentato dello 0,5% anche quello del titolo 2 è aumentato dello 0,5%.

L'equazione (2) diventa

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_1 b_1 + \sigma_2 b_2)^2}$$

$$\sigma = \sigma_1 b_1 + \sigma_2 b_2$$



Si noti che in questo caso non esiste nessuna combinazione (b_1, b_2) con $\sigma = 0$: il rischio non può essere eliminato.

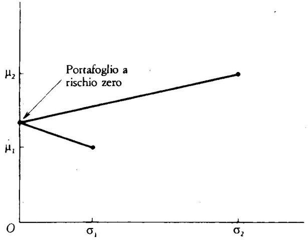
Combinazione di due titoli con $\rho = -1$

Se $\rho = -1$ le variazioni del rendimento dei due titoli in un certo periodo sono uguali ma di segno contrario. Ad esempio se il rendimento del titolo 1 è aumentato dello 0,5% quello del titolo 2 è diminuito dello 0,5%.

L'equazione (2) diventa

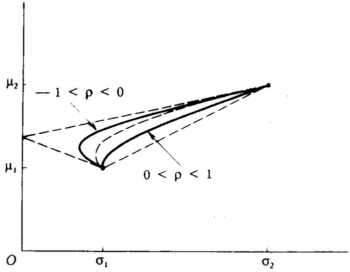
$$\sigma = \sqrt{(\sigma_1 b_1 - \sigma_2 b_2)^2}$$

$$\sigma = |\sigma_1 b_1 - \sigma_2 b_2|$$



Si noti che in questo caso esiste una combinazione (b_1, b_2) con $\sigma = 0$: il rischio può essere eliminato.

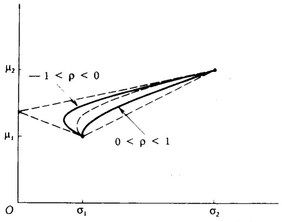
Combinazione di due titoli con $-1 < \rho = 1 < 1$



La situazione è intermedia rispetto alle due precedenti.

Frontiera efficiente

- La frontiera efficiente è il sottoinsieme di tutti i portafogli possibili che contiene i portafogli efficienti.
- Portafoglio efficiente: un portafoglio è efficiente se non esistono altri portafogli che hanno
  - lo stesso rendimento ma minor rischio;
  - lo stesso rischio ma maggior rendimento;
  - un maggior rendimento e un minor rischio.



Combinare più di due titoli rischiosi

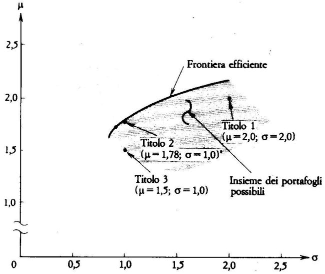
In questo caso le variabili che ci interessano hanno un'espressione più complicata

$$r = \sum_k r_k b_k$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_k \sigma_k^2 b_k^2 + \sum_{k \neq j} \sigma_{kj} b_k b_j}$$

occorre tener conto di tutte le correlazioni che i titoli hanno tra di loro: $\sum_{k \neq j} \sigma_{kj} b_k b_j$.

Calcolando i valori di r e σ per tutte le combinazioni $\{b_i\}$ che soddisfano $\sum b_i = 1$ si ottiene l'insieme delle possibilità ammissibili.



Graficamente: l'area ombreggiata è l'insieme delle possibilità ammissibili.

Ogni punto è una combinazione di titoli che chiamiamo portafoglio.

Un portafoglio è una variabile casuale che può a sua volta essere combinata con altre.

Combinazione di un titolo privo di rischio e di un portafoglio rischioso

- Anche un titolo privo di rischio può essere visto come una VC. Si tratta di una particolare VC detta "degenere" ovvero che può assumere un solo valore con probabilità pari a 1.
- Le nuove combinazioni ammissibili si trovano lungo una retta in quanto il titolo privo di rischio ha *standar deviation* uguale a zero.

In formule

Sia il titolo 1 il portafoglio di titoli rischiosi caratterizzato da (r_r, σ_r) e il titolo 2 quello privo di rischio caratterizzato da $(R_f, 0)$. Le equazioni (1) e (2) diventano:

$$r = r_r b_r + R_f b_f$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_r^2 b_r^2 + 0 b_f^2 + 2 b_r b_f \rho \sigma_r 0} = \sqrt{\sigma_r^2 b_r^2} = \sigma_r b_r$$

dove:
b_r è la percentuale di F detenuta nel portafoglio di titoli rischiosi;
b_f è la percentuale di F detenuta nel titolo privo di rischio.
Si ricordi che

$$b_r + b_f = 1$$

Dalla seconda equazione della diapositiva precedente otteniamo

$$b_r = \frac{\sigma}{\sigma_r}$$

ricordando che $b_f = 1 - b_r$, la prima equazione diventa

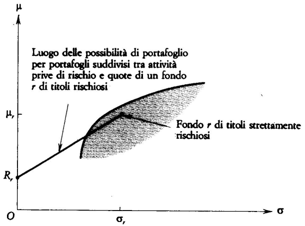
$$r = r_r b_r + R_f - R_f b_r = R_f + (r_r - R_f) b_r$$

utilizzando la prima equazione di questa diapositiva si ottiene

$$r = R_f + \frac{r_r - R_f}{\sigma_r} \sigma$$

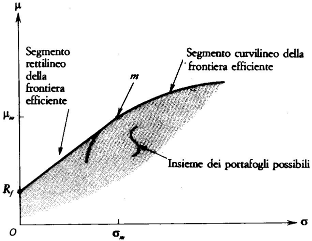
che è l'equazione di una retta con intercetta R_f e coefficiente angolare $\frac{r_r - R_f}{\sigma_r}$.

Rappresentazione grafica



l'insieme ammissibile individuato nella figura precedente non è quello migliore: è possibile scegliere portafogli rischiosi (da combinare con il titolo privo di rischio) che diano maggiore rendimento a parità di rischio.
È possibile in sostanza ampliare l'insieme ammissibile.

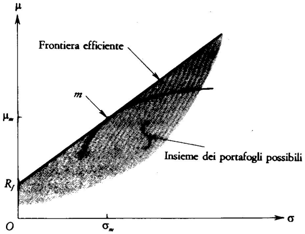
L'insieme ammissibile più ampio che è possibile ottenere è rappresentato qui sotto



Il portafoglio indicato con *m* è molto importante: è quello che se verrà scelto consentirà di ampliare al massimo l'insieme di scelta.

Viene detto "portafoglio di mercato".

Se diamo ai soggetti la possibilità di vendere allo scoperto ($b_f < 0$) si ottiene un ulteriore ampliamento dell'insieme ammissibile.



Possiamo scrivere l'equazione della frontiera efficiente. Si tratta di una retta con intercetta pari al tasso privo di rischio (R_f) e passante per il punto (σ_m, r_m)

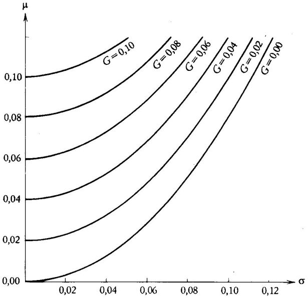
$$r = R_f + \frac{r_m - R_f}{\sigma_m}\sigma.$$

Questa viene detta "retta di mercato" (*capital market line*).

L'inclinazione della linea ci dice quanto rendimento possiamo ottenere se accettiamo aumenti di rischio. Il coefficiente $\frac{r_m - R_f}{\sigma_m}$ è definito come il prezzo del rischio o premio per il rischio.

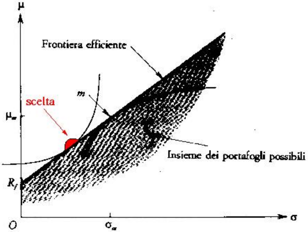
Curve di indifferenza

- Per poter effettuare la scelta, il soggetto deve avere un ordinamento di preferenze sulle variabili casuali.
- La teoria dell'utilità attesa consente di ottenere tale ordinamento.
- Ricordando gli insegnamenti della teoria dell'utilità attesa, le curve di indifferenza di un soggetto avverso al rischio possono essere rappresentate come nella figura seguente



Un aumento del rischio richiede un aumento del rendimento più che proporzionale per mantenere l'utilità costante.

Scelta



Sul mercato possiamo osservare tassi di interesse diversi in quanto a impieghi più rischiosi devono corrispondere rendimenti attesi più alti.

- Contrariamente a quello che si potrebbe pensare, i soggetti detengono attività liquide anche se rendono poco. La loro presenza nei portafogli può essere giustificata dal fatto che queste attività non sono rischiose.
- Tra tutti i portafogli che comprendono solo titoli rischiosi ne esiste uno solo che è ottimale(il portafoglio di mercato). Tutti gli individui sceglieranno di detenere questo portafoglio. La percentuale della ricchezza investita in questo portafoglio varia da individuo a individuo in base all'avversione al rischio.

Applicazioni

- La domanda delle varie attività finanziarie:
  - moneta;
  - titoli rischiosi.
- Rendimenti teorici dei titoli rischiosi (modello CAPM).

Di queste verrà approfondita in particolare la domanda di monetala e la domanda di titoli rischiosi .

La domanda di moneta

Ricordiamo le equazioni del rendimento atteso e della deviazione standard nel caso di due titoli rischiosi:

$$E(R) = b_1 r_1 + b_2 r_2$$

$$\sigma(R) = \sqrt{(b_1\sigma_1)^2 + (b_2\sigma_2)^2 + 2b_1 b_2 \rho \sigma_1 \sigma_2}$$

sostituendo il primo titolo con la moneta caratterizzata da r_M e σ_M abbiamo

$$E(R) = b_M r_M + b_2 r_2$$

$$\sigma(R) = \sqrt{(b_M\sigma_M)^2 + (b_2\sigma_2)^2 + 2b_M b_2 \rho \sigma_M \sigma_2}$$

Essendo $\sigma_M = 0$, la seconda equazione risulta molto semplice

$$\sigma(R) = \sqrt{0 + (b_2\sigma_2)^2 + 0}$$

dunque

$$E(R) = b_M r_M + b_2 r_2$$

$$\sigma(R) = \sqrt{(b_2\sigma_2)^2} = b_2\sigma_2$$

e dunque dalla seconda otteniamo

$$b_2 = \frac{1}{\sigma_2}\sigma(R)$$

Ora, possiamo esprimere la prima equazione:

$$E(R) = b_M r_M + b_2 r_2$$

in termini di b_2 ricordando che $b_M + b_2 = 1$ e pertanto

$$b_M = 1 - b_2$$

sostituendo abbiamo dunque

$$E(R) = (1 - b_2) r_M + b_2 r_2$$

$$E(R) = r_M + b_2 (r_2 - r_M)$$

$$E(R) = r_M + b_2(r_2 - r_M) \qquad (per\ \ memoria)$$

ricordando che alla diapositiva 3 abbiamo ottenuto

$$b_2 = \frac{1}{\sigma_2}\sigma(R)$$

sostituendo b_2 nella prima otteniamo

$$E(R) = r_M + \frac{r_2 - r_M}{\sigma_2}\sigma(R)$$

$$E(R) = r_M + \frac{r_2 - r_M}{\sigma_2}\sigma(R) \qquad (per\ \ memoria)$$

Se si assume inoltre $r_M = 0$ l'equazione può essere scritta in modo molto semplice:

$$E(R) = \frac{r_2}{\sigma_2}\sigma(R)$$

Ricapitolando

Se consideriamo la moneta caraterizzata da $r_M = 0$ e $\sigma_M = 0$ abbiamo:

$$E(R) = \frac{r_2}{\sigma_2}\sigma(R)$$

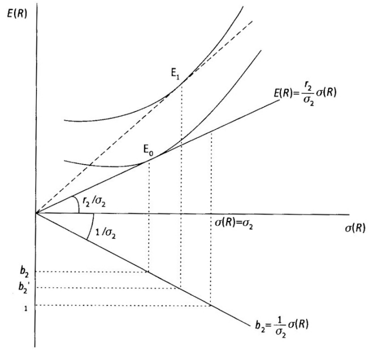
$$b_2 = \frac{1}{\sigma_2}\sigma(R)$$

Dunque, una volta identificato un livello del rischio del portafoglio ($\sigma(R)$), utilizzando queste equazioni conosciamo il rendimento atteso di tale portafoglio ($E(R)$) e la composizione (b_2 e $b_M = 1 - b_2$).

Trattazione grafica

Le equazioni a cui siamo giunti vengono usate nella figura 3 pag. 100 del libro di testo.

FIGURA 3 La scelta di portafoglio tra moneta e titoli



La domanda di titoli rischiosi

- La teoria fin qui vista ci consente di derivare la funzione di domanda delle varie attività.
- Questa, unita ad una funzione di offerta, ci permette di individuare l'equilibrio sui vari mercati e di analizzare come esso varia al variare di alcuni fattori come le aspettative e il rischio delle attività.

In particolare la domanda dell'attività K è data da:

$$K = b_K F$$

dove b_K è la frazione di ricchezza che viene detenuta nel titolo K e che possiamo determinare utilizzando la teoria del portafoglio e F è la ricchezza.
Utilizzando la teoria del portafoglio è possibile vedere che b_K dipende

- positivamente
  - dal rendimento atteso del titolo (r_K^e) e
  - dal rischio dei titoli alternativi (σ_J)
- negativamente
  - dal rischio del titolo (σ_K) e
  - dal rendimento atteso dei titoli alternativi (r_J^e).

In formule:

$$b_K = K(\underset{+}{r_K^e}, \underset{-}{r_J^e}, \underset{-}{\sigma_K}, \underset{+}{\sigma_J})$$

e visto che

$$K^d = b_K F$$

possiamo scrivere

$$K^d = K(\underset{+}{r_K^e}, \underset{-}{r_J^e}, \underset{-}{\sigma_K}, \underset{+}{\sigma_J}, \underset{+}{F})$$

Un ulteriore passo può essere fatto richiamando la formulazione matematica del rendimento derivata in precedenza (diapositiva 8):

$$r_K^e = \left(\frac{v^e - v}{v} \right) + \frac{v_n}{v} r$$

Da questa equazione vediamo come il redimento atteso di un titolo varia in modo inverso con il suo valore di mercato (v):

$$r_K^e = r_K^e(\underset{-}{v}, \cdots)$$

Possiamo dunque scrivere

$$K^d = K(\underset{-}{v}, \underset{-}{r_J^e}, \underset{-}{\sigma_K}, \underset{+}{\sigma_J}, \underset{+}{F})$$

La domanda di moneta

La domanda di moneta di portafoglio si ottiene come caso particolare in cui il rischio e il rendimento del titolo vengono posti pari a zero: $r_K^e = 0$ e $\sigma_K = 0$.
Abbiamo dunque

$$b_M = M(\underset{-}{r_J^e}, \underset{+}{\sigma_J})$$

e dunque

$$M^d = b_M F = M(\underset{-}{r_J^e}, \underset{+}{\sigma_J}, \underset{+}{F})$$

Concludiamo quindi che la domanda di moneta di portafoglio

- diminuisce se aumenta il tasso di rendimento delle attività alternative (r_J^e),
- aumenta se cresce il loro rischio (σ_J),
- aumenta se aumenta la ricchezza (F)

La risposta alla nostra domanda

- All'inizio di questa lezione c'eravamo chiesti:
  - Perchè i soggetti detengono attività che hanno un rendimento più basso di quello massimo?
- La risposta è dunque che i soggetti tengono conto anche del rischio, e attività con rendimento basso possono contribuire a massimizzare l'utilità al pari di quelle con rendimento alto in quanto hanno un più basso livello di rischio.

Un'osservazione importante

Se si hanno delle variabili casuali non perfettamente correlate tra di loro, la diversificazione riduce il rischio.